Tutorato Algebra Lineare - 17/04/25

Prima parte: Correzione del Terzo Foglio : FINE

Seconda parte: Esercitazione [soluzioni sull'altro file]

Esercizio 1. Per le matrici seguenti
 a) determinare gli autovalori e autovettori;
 b) decidere se la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & a+2 & 0 \\ a & -2 & a^2-1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Soluzione

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & a+2 & 0 \\ a & -2 & a^2-1 \end{pmatrix}$

Autovalori di A:

$$P_A(t) = \det(A-tI) = \det\begin{pmatrix} -t & 2a & a \\ 0 & a+2-t & 0 \\ a & -2 & a^2-1-t \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2}(a+2-t)\det\begin{pmatrix} -t & a \\ a & a^2-1-t \end{pmatrix}$$

$$= (a+2-t)\left(t(t-a^2+1)-a^2\right)$$

$$= -(t-a-2)\left(t^2-(a^2-1)t-a^2\right)$$

$$= -(t-a-2)(t+1)(t-a^2).$$

$t^2-a^2t+t-a^2$

$t(t-a^2)+t-a^2 = (t+1)(t-a^2)$

Autovalori di A: $-1, a^2, a+2$ (non necessariamente distinti: $a^2=a+2 \ \vee \ a+2=-1$ cioè $a=-1 \vee a=2 \vee a=-3$)

Autovettori: $Av=\lambda v \iff (A-\lambda I)v=0$

$\lambda=-1$)

$$A-\lambda I = A+I = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a \\ 0 & a+3 & 0 \\ a & -2 & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - aR_1} \begin{pmatrix} 1 & 2a & a \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & \underbrace{-2-2a^2}_{-2(1+a^2)\neq 0} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2ay+az=0 \\ \cancel{-2(1+a^2)}_{\neq 0}\, y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -az \\ z \text{ libera} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -az \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V_{-1} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\quad m_{geo}(-1) = 1$ INDIPENDENTEMENTE DA a.

$\lambda = a^2)$

$$A - \lambda I = A - a^2 I = \begin{pmatrix} -a^2 & 2a & a \\ 0 & a+2-a^2 & 0 \\ a & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + aR_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2-a^2 & 0 \\ a & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

se $=0$, l'equazione non conta
se $\neq 0$, allora $y=0$

$$\begin{cases} (a+2-a^2)\, y = 0 \\ ax - 2y - z = 0 \end{cases}$$

- se $a^2 - a - 2 = 0$, allora $z = ax - 2y$

$$\left(\begin{array}{l} (a+1)(a-2) = 0 \\ a = -1 \lor a = 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax - 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- se $a^2 - a - 2 \neq 0$, allora $\begin{cases} y = 0 \\ ax - \cancel{2y} - z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ ax \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

$$V_{a^2} = \begin{cases} \mathrm{Span}\Big(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}^{\text{lin. indip.}}\Big), & a = -1 \lor a = 2 \\ \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$m_{geo}(a^2) = \begin{cases} 2, & a = -1 \lor a = 2 \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\lambda = a+2)$

$$A - \lambda I = A - (a+2)I = \begin{pmatrix} -(a+2) & 2a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & -2 & a^2 - a - 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + aR_3} \begin{pmatrix} a^2 - a - 2 & 0 & \overbrace{a(a^2 - a - 2)}^{a + a(a^2 - a - 3)} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & -2 & a^2 - a - 3 \end{pmatrix}$$

e di nuovo distinguiamo i due casi:

- $a^2 - a - 2 = 0 \implies ax - 2y + \overbrace{\underbrace{(a^2 - a - 3)}_{\underbrace{a^2-a-2}_{=0} - 1}}^{=-1} z = 0 \implies z = ax - 2y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax - 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- $a^2-a-2 \neq 0 \implies \begin{cases} \overbrace{x + az = 0}^{\text{dividendo la prima eq. per } a^2-a-2} \\ ax - 2y + (a^2-a-3)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -az \\ y = \frac{1}{2}(\cancel{a^2} - a - 3 - \cancel{a^2}) = -\frac{1}{2}(a+3) \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -az \\ -(a+3)z/2 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -a \\ -(a+3)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{a+2} = \begin{cases} \text{Span}\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}^{\text{lin. indip.}} \right\}, & a = -1 \vee a = 2 \quad \rightarrow m_{geo}(a+2) = 2 \\ \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ a+3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, & \text{altrimenti} \quad \rightarrow m_{geo}(a+2) = 1 \end{cases}$$

DIAGONALIZZABILITÀ DI A

- $m_{geo}(-1) = 1 = m_{alg}(-1) \iff a \neq -3$

- $m_{geo}(a^2) = \begin{cases} 2, & a \in \{-1, 2\} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

  $\| \ \forall a \in \mathbb{R}$

  $m_{alg}(a^2) = \begin{cases} 2, & a^2 = a+2 \iff a \in \{-1, 2\} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $m_{geo}(a+2) = \begin{cases} 2, & a \in \{-1, 2\} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

  $\| \ a \neq -3$

  $m_{alg}(a+2) = \begin{cases} 2, & a+2 = -1 \vee a+2 = a^2 \iff a \in \{-3, -1, 2\} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Risposta: A è diagonalizzabile su $\mathbb{R} \iff a \neq -3$.

4) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$P_B(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & -16 \\ 1 & -t & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2-t \end{pmatrix} = -t \det\begin{pmatrix} -t & 0 & -16 \\ 1 & -t & -8 \\ 0 & 1 & -2-t \end{pmatrix}$$

$$= -t\left(t^2(-2-t) - 16 - 8t\right)$$

$$= t\left(t^2(2+t) + 8(2+t)\right)$$

$$= t(2+t)(t^2+8).$$

Autovalori di B : $-2, 0, \pm \underbrace{i\sqrt{8}}_{2i\sqrt{2}}$ $\rightsquigarrow$ B $\begin{cases} \text{NON diagonalizzabile su } \mathbb{R} \\ \text{diagonalizzabile su } \mathbb{C} \end{cases}$

$1 \le m_{geo}(\lambda) \underset{=}{\le} m_{alg}(\lambda) = 1$

Autovettori: $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $Bv = \lambda v$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \{-2, 0, \pm 2i\sqrt{2}\}$$

cioè:
$$\begin{cases} -16x_4 = \lambda x_1 \\ x_1 - 8x_4 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \\ x_2 - 2x_4 = \lambda x_4 \end{cases}$$

$\lambda = 0)$
$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\lambda \neq 0)$
$\lambda \in \{-2, \pm 2i\sqrt{2}\}$
$$\begin{cases} x_1 = (-16/\lambda)x_4 \\ (x_1 = \lambda x_2 + 8x_4)^{*\ \text{non serve}} \\ x_3 = (1/\lambda)x_2 \\ x_2 = (\lambda+2)x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{16}{\lambda}x_4 \\ x_2 = (\lambda+2)x_4 \\ x_3 = \frac{\lambda+2}{\lambda}x_4 \end{cases}$$

$$V_\lambda = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -16/\lambda \\ \lambda+2 \\ (\lambda+2)/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -16 \\ \lambda^2+2\lambda \\ \lambda+2 \\ \lambda \end{pmatrix}\right), \quad \lambda \in \{-2, \pm 2i\sqrt{2}\}.$$

* sappiamo che $\dim V_\lambda = m_{geo}(\lambda) = 1$ (cioè $rk(B - \lambda I) = 3$), quindi una $\overbrace{\text{riga di } B-\lambda I}^{\text{equazione del sistema}}$ è combinazione lineare delle altre (si cancella). Nel nostro caso, le altre tre sono indipendenti, quindi consideriamo loro.